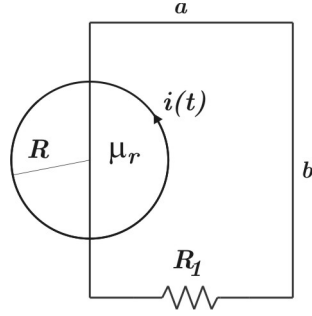


Un solenoide de radio $R = 1\text{ m}$ y longitud mucho mayor que su diámetro tiene una densidad de espiras $n = 900\text{ m}^{-1}$. Su núcleo es de material ferromagnético blando que puede considerarse lineal con $\mu_r = 400$. En el punto medio del eje del solenoide se coloca una espira rectangular, de lados $a = 120\text{ cm}$ y $b = 250\text{ cm}$, coplanar con la sección transversal del solenoide, como indica la figura. La resistencia de la espira es $R_1 = 2\Omega$. Si por el bobinado del solenoide se hace circular una corriente $i(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$, con $I_0 = 4\text{ mA}$ y $\tau = 1\text{ ms}$, hallar la carga total que circula por la espira desde $t = 0$ hasta que se apaga la corriente.



Solución :

Para calcular el campo magnético producido por el solenoide usamos en método de Ampere, suponiendo

$$\mathbf{H} = H\hat{\mathbf{z}} \text{ en el interior del solenoide}$$

$$\mathbf{H} = 0 \text{ en el exterior del solenoide}$$

Entonces, tomando una curva de Ampere como se muestra en la figura se tendrá

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_{conc}$$

$$Hh = nhi(t)$$

$$H = ni(t)$$

Luego

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

$$B = \mu_0\mu_r ni(t)$$

El flujo de \mathbf{B} a través de la espira será

$$\Phi = \iint_{SOLE \cap ESP.} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{SOLE \cap ESP.} B(t) \cdot dS = B(t) \iint_{SOLE \cap ESP.} dS = B(t) \frac{\pi R^2}{2}$$

donde $d\mathbf{S} = dS\hat{\mathbf{z}}$ implica que el sentido de circulación antihorario es el positivo.

La *fem* será

$$\begin{aligned} fem &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\pi R^2}{2} \frac{dB}{dt} = -\frac{\pi R^2}{2} \mu_0 \mu_r n \frac{di(t)}{dt} = -\frac{\pi R^2}{2} \mu_0 \mu_r n I_0 \left(-\frac{1}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ &= \frac{\pi R^2 \mu_0 \mu_r n I_0}{2\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \end{aligned}$$

y la corriente

$$i_{esp}(t) = \frac{fem}{R} = \frac{\pi R^2 \mu_0 \mu_r n I_0}{2\tau R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Notemos que $i_{esp}(t) > 0 \forall t$ de manera que circula en sentido antihorario, reforzando entonces el campo inducido al campo del solenoide. Esto está bien, ya que la corriente del solenoide disminuye con el tiempo y por lo tanto también disminuyen el módulo del campo magnético y su flujo.

Por último, teniendo en cuenta que

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

resulta

$$\begin{aligned} dq &= i(t) dt \\ \int_0^{q_T} dq &= \int_0^\infty i_{esp}(t) dt \\ q_T &= \int_0^\infty \frac{\pi R^2 \mu_0 \mu_r n I_0}{2\tau R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = \frac{\pi R^2 \mu_0 \mu_r n I_0}{2\tau R} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt \\ &= \frac{\pi R^2 \mu_0 \mu_r n I_0}{2\tau R} \left[-\tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \Big|_0^\infty \right] \\ &= \frac{\pi R^2 \mu_0 \mu_r n I_0}{2R} \end{aligned}$$