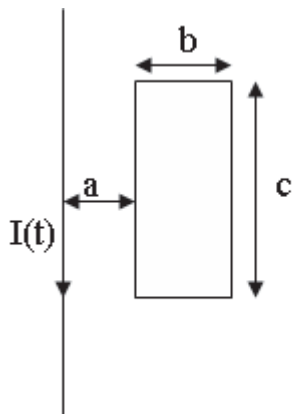


- 2) Una espira rectangular se coloca a una distancia a de un cable infinito por el que circula una corriente $I = cte$ y en forma coplanar al cable.
- Determinar el coeficiente de inducción mutua.
 - Si en $t = 0$, la espira comienza a alejarse del cable infinito a una velocidad constante v , en la dirección perpendicular al cable, calcular la *fem* inducida en función del tiempo. Indicar el sentido de la corriente inducida en la espira.
 - Idem **b)**, solo que la espira se desplaza paralela al cable.
 - Si se hace variar la corriente que circula por el cable con el tiempo de manera que $I(t) = At - B$, con A y B constantes, ¿se modifican los resultados obtenidos en **b)** y **c)**? ¿En este caso la *fem* inducida es igual a la circulación de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ a lo largo del circuito determinado por la espira?



- a) El coeficiente de inducción mutua es

$$M = \frac{d\Phi_{eh}}{dI_h}$$

donde Φ_{eh} es el flujo a través de la superficie de la espira del campo producido por el hilo e I_h es la corriente del hilo.

El campo de hilo, en el plano xy en el que se ubica la espira, es

$$\mathbf{B}_h = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{\mathbf{z}}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \Phi_{eh} &= \int \mathbf{B}_h \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_0^c \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{\mathbf{z}} \cdot d\mathbf{s} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{a} \right) \end{aligned}$$

de modo que

$$M = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{a} \right)$$

- b) En este caso tendremos

$$\Phi_{eh} = \int \mathbf{B}_h \cdot d\mathbf{s}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^c \int_{a+vt}^{a+b+vt} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{\mathbf{z}} \cdot d\mathbf{s} \hat{\mathbf{z}} \\
&= \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b+vt}{a+vt} \right)
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
fem &= -\frac{d\Phi_{eh}}{dt} \\
&= -\frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_0 I c}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b+vt}{a+vt} \right) \right] \\
&= -\frac{\mu_0 I c}{2\pi} \left(\frac{a+vt}{a+b+vt} \right) \left[\frac{v(a+vt) - v(a+b+vt)}{(a+vt)^2} \right] \\
&= -\frac{\mu_0 I c}{2\pi} \left(\frac{1}{a+b+vt} \right) \left[\frac{-v}{(a+vt)} \right] \\
&= \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \left[\frac{vb}{(a+b+vt)(a+vt)} \right]
\end{aligned}$$

vemos que $fem > 0$ de manera que la corriente inducida circula en sentido antihorario (pues la normal a la espira se eligió saliente, el sentido antihorario es positivo). De esta manera, el campo inducido es saliente en la espira, reforzando así al campo del hilo. Esto es lo correcto, ya que el flujo disminuye con el tiempo, al alejarse la espira del hilo.

Otra forma de calcular la fem es con

$$\begin{aligned}
fem &= \oint_{C(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\
&= -\int_S \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{C(S)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\
&= \oint_{C(S)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}
\end{aligned}$$

pues en este caso $I = cte$ y $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$.

En el integrando se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \times \mathbf{B} &= v \hat{\mathbf{x}} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi x} (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}}) \\
&= -\frac{\mu_0 I v}{2\pi x} \hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
fem &= \oint_{C(S)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\
&= \int_{a+vt}^{a+b+vt} \left(-\frac{\mu_0 I v}{2\pi x} \right) \hat{\mathbf{y}} \cdot dx \hat{\mathbf{x}} + \int_0^c \left[-\frac{\mu_0 I v}{2\pi (a+b+vt)} \right] \hat{\mathbf{y}} \cdot dy \hat{\mathbf{y}} \\
&+ \int_{a+b+vt}^{a+vt} \left(-\frac{\mu_0 I v}{2\pi x} \right) \hat{\mathbf{y}} \cdot dx \hat{\mathbf{x}} + \int_c^0 \left[-\frac{\mu_0 I v}{2\pi (a+vt)} \right] \hat{\mathbf{y}} \cdot dy \hat{\mathbf{y}} \\
&= -\frac{\mu_0 I v c}{2\pi (a+b+vt)} + \frac{\mu_0 I v c}{2\pi (a+vt)} \\
&= \frac{\mu_0 I v c}{2\pi} \left[\frac{1}{(a+vt)} - \frac{1}{(a+b+vt)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0 I v c}{2\pi} \left[\frac{(a+b+vt) - (a+vt)}{(a+vt)(a+b+vt)} \right] \\
&= \frac{\mu_0 I v c}{2\pi} \left[\frac{(a+b+vt) - (a+vt)}{(a+vt)(a+b+vt)} \right] \\
&= \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \left[\frac{bv}{(a+vt)(a+b+vt)} \right]
\end{aligned}$$

c) En este caso no hay cambio de flujo y $fem = 0$.